Réallocation de Levenberg-Marquardt

François AUGER[1] Eric CHASSANDE-MOTTIN[2] Patrick FLANDRIN[3]

[1]IREENA (site de Saint-Nazaire), Université de Nantes

[2]Laboratoire AstroParticule et Cosmologie (équipe ADAMIS), CNRS - Université Paris 7

[3]Laboratoire de Physique, CNRS - École Normale Supérieure de Lyon

francois.auger@univ-nantes.fr, ecm@apc.univ-paris7.fr, patrick.flandrin@ens-lyon.fr

Résumé – Cet article présente un nouveau processus de réallocation, appelé réallocation de Levenberg-Marquardt. Par rapport à la réallocation classique, cette réallocation fait appel aux dérivées secondes de la phase de la transformée de Fourier à court-terme, et fournit à l'utilisateur un paramètre de réglage supplémentaire. Ce paramètre lui permet de choisir entre une plus faible ou plus forte concentration des composantes du signal dans le plan temps-fréquence.

Abstract – This paper presents a new time-frequency reassignment process, called the Levenberg-Marquardt reassignment. Compared to the classical one, this new reassignment process uses the second-order derivatives of the phase of the short-time Fourier transform, and provides the user with a setting parameter. This parameter allows him to produce a weaker or a stronger localization of the signal components in the time-frequency plane.

1 Introduction

Obtenir des représentations temps-fréquence fortement localisées, notamment dans le cas de "chirps" multi-composantes, est une problématique ancienne qui connaît depuis quelques années un regain d'intérêt avec le développement des approches par décomposition modale empirique et les techniques reliées de "synchrosqueezing" [2, 13, 15]. La *réallocation* [5] des représentations temps-fréquence [7], et plus particulièrement des spectrogrammes, a été proposée comme une solution à ce problème. Son principe peut s'apparenter à la recherche des racines (ou zéros) d'une fonction non linéaire déduite de la phase de la transformée de Fourier à court-terme du signal analysé. Ces racines correspondent aux "arêtes" [6] de la représentation temps-fréquence, formées de points caractéristiques de la localisation de l'énergie du signal.

De manière générale, pour trouver des valeurs numériques approchées des solutions d'une équation du type $f(x) = 0$, où f est une fonction continue, il est possible d'envisager trois classes de méthodes :

- les méthodes de point fixe, dans lesquelles on cherche à faire converger une suite $x_{n+1} = x_n - \lambda\, f(x_n)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- les méthodes différentielles, dans lesquelles l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \lambda\, f(x(t))$ est simulée jusqu'à l'obtention d'un régime permanent.
- les méthodes newtoniennes, dans lesquelles on cherche à faire converger une suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Pour augmenter la vitesse de convergence, il est possible d'ajouter à $f'(x_n)$ un facteur d'amortissement μ, avec $\mu \in \mathbb{R}_+$. On obtient alors un algorithme de Levenberg-Marquardt [12, 14, 8].

La réallocation, proposée initialement dans [9, 10, 11] et réétudiée dans [1], s'apparente à une itération de la première classe de méthodes. La réallocation différentielle, proposée initialement dans [3, 4], s'apparente à la seconde. L'objectif de cet article est de proposer et d'étudier un processus de réallocation basé sur la troisième classe de méthodes, et plus particulièrement sur un algorithme de Levenberg-Marquardt. Les résultats présentés, à la fois analytiques et numériques, montrent que cette réallocation fournit à l'utilisateur un paramètre de réglage supplémentaire qui lui permet de choisir librement le degré de concentration des représentations temps-fréquence réallouées.

2 Définitions

Soit $\mathrm{F}_x^h(t,\omega)$ la transformée de Fourier à court-terme du signal x, réalisée à l'aide de la fonction fenêtre h, dont on notera $\mathrm{M}_x^h(t,\omega)$ et $\Phi_x^h(t,\omega)$ le module et la phase et que l'on définira par

$$\mathrm{F}_x^h(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, h^*(t-u)\, e^{-\jmath\omega u}\, du \tag{1}$$

$$= \mathrm{M}_x^h(t,\omega)\, e^{\jmath\Phi_x^h(t,\omega)} \tag{2}$$

Cette représentation permet de caractériser le signal x par un ensemble de points du plan temps-fréquence qui forment ses *arêtes* [6], pour lesquelles $\frac{\partial\Phi_x^h}{\partial\omega}(t,\omega) = -t$ et $\frac{\partial\Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = 0$. Ceci conduit à définir un vecteur de réallocation

$$R_x^h(t,\omega) = \begin{pmatrix} t + \frac{\partial\Phi_x^h}{\partial\omega}(t,\omega) \\ -\frac{\partial\Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) \end{pmatrix} \tag{3}$$

tel que $R_x^h(t,\omega) = 0$ pour les points appartenant aux arêtes du signal.

Pour connaître l'arête la plus "proche" d'un point (t,ω) du plan temps-fréquence, la réallocation classique [9, 10, 11] consiste à appliquer à partir du point (t,ω) une itération d'une mé-

thode de point fixe, avec $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_x(t,\omega) \\ \hat{\omega}_x(t,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} - R_x^h(t,\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) \\ \omega + \frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Nous proposons d'étudier dans cet article un nouveau processus, appelé *réallocation de Levenberg-Marquardt*, qui consiste à appliquer à partir du point (t,ω) une itération d'un algorithme de Levenberg-Marquardt [12, 14, 8],

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_x(t,\omega) \\ \tilde{\omega}_x(t,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} - \left(\nabla R_x^h(t,\omega) + \mu\, I_2\right)^{-1} R_x^h(t,\omega) \quad (5)$$

$$\nabla R_x^h(t,\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_x^h}{\partial t}(t,\omega) & \frac{\partial R_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) & \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) \\ -\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) & -\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) \end{pmatrix} \quad (7)$$

avec $\mu \in I\!R_+$ et I_2 la matrice identité de dimension 2. Ce processus, qui exploite les dérivées secondes de la phase de la transformée de Fourier à court-terme, peut entre autres être utilisé pour construire une nouvelle représentation temps-fréquence qui focalisera l'énergie du signal autour de ses arêtes, constituant ainsi une représentation plus parcimonieuse :

$$\mathrm{RLM}_x^h(t,\omega) \quad (8)$$
$$= \iint \left|\mathrm{F}_x^h(u,\Omega)\right|^2 \delta\left(t - \tilde{t}_x(u,\Omega)\right) \delta\left(\omega - \tilde{\omega}_x(u,\Omega)\right) du \, \frac{d\Omega}{2\pi}$$

3 Propriétés

3.1 Covariance par translations

Comme la réallocation "classique", le processus ainsi défini est compatible avec les opérateurs de translations temporelle et fréquentielle :

$$\text{Si } y(t) = x(t-t_0)\, e^{\jmath \omega_0 t}, \quad (9)$$
$$\text{alors } \mathrm{F}_y^h(t,\omega) = \mathrm{F}_x^h(t-t_0, \omega-\omega_0)\, e^{-\jmath(\omega-\omega_0)t_0},$$
$$\Phi_y^h(t,\omega) = \Phi_x^h(t-t_0,\omega-\omega_0) - (\omega-\omega_0)t_0,$$
$$\text{donc } R_y^h(t,\omega) = R_x^h(t-t_0,\omega-\omega_0)$$
$$\nabla R_y^h(t,\omega) = \nabla R_x^h(t-t_0,\omega-\omega_0)$$
$$\text{d'où } \tilde{t}_y(t,\omega) = t_0 + \tilde{t}_x(t-t_0,\omega-\omega_0) \quad (10)$$
$$\tilde{\omega}_y(t,\omega) = \omega_0 + \tilde{\omega}_x(t-t_0,\omega-\omega_0) \quad (11)$$

Ce processus est donc indépendant du choix de l'origine des temps, et ne fait donc que produire un déplacement *relatif* par rapport au point (t,ω).

3.2 Homogénéité

Bien qu'elles semblent au premier abord de nature purement mathématiques, les expressions des opérateurs de réallocation proposés sont bien cohérentes vis à vis de l'analyse dimensionnelle : si on note $[x]$ la dimension de x, alors $[t] = s$, $[\omega] = s^{-1}$ et $[\Phi_x^h] = 1$, donc

$$\left[\nabla R_x^h\right] = \left[\nabla R_x^h + \mu\, I_2\right] = \left[\left(\nabla R_x^h + \mu\, I_2\right)^{-1}\right] = \begin{pmatrix} 1 & s^2 \\ s^{-2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left[R_x^h\right] = \left[\left(\nabla R_x^h + \mu\, I_2\right)^{-1} R_x^h\right] = \begin{pmatrix} s \\ s^{-1} \end{pmatrix},$$

et $\left[\det\left(\nabla R_x^h + \mu\, I_2\right)\right] = 1$. Les coefficients de l'anti-diagonale de $\left(\nabla R_x^h + \mu\, I_2\right)^{-1}$ ont la dimension adéquate pour que les combinaisons linéaires de chacune des deux composantes de R_x^h utilisées dans les calculs de $\tilde{t}_x$ et $\tilde{\omega}_x$ soient homogènes.

4 Quelques exemples analytiques

Pour apprécier les qualités de ce processus de réallocation, on peut étudier quelques cas où il est possible d'obtenir des expressions analytiques simples des opérateurs de réallocation $\tilde{t}_x(t,\omega)$ et $\tilde{\omega}_x(t,\omega)$. On s'intéressera ici aux résultats obtenus à l'aide d'une fenêtre d'analyse gaussienne d'énergie unitaire et de largeur temporelle λ, $h(t) = \lambda^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-t^2/(2\lambda^2)}$.

4.1 Sinusoïde

Pour une sinusoïde complexe de pulsation ω_0, $x(t) = e^{\jmath\omega_0 t}$, on obtient [4] $\Phi_x^h(t,\omega) = (\omega_0 - \omega)\, t$, donc

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) = -t, \quad \frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = \omega_0 - \omega, \quad (12)$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = -1, \ \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = 0.$$

Avec la réallocation classique, $\hat{t}_x(t,\omega) = t$ et $\hat{\omega}_x(t,\omega) = \omega_0$, donc toute l'énergie du signal est *d'autorité* concentrée sur la droite $\omega = \omega_0$. Avec la réallocation de Levenberg-Marquardt, $\tilde{t}_x(t,\omega) = t$ et $\tilde{\omega}_x(t,\omega) = \frac{\omega_0 + \mu\omega}{1+\mu}$. Il n'y a donc pas de déplacement temporel, et $\tilde{\omega}_x$ est une pulsation comprise entre ω_0 (obtenue pour $\mu = 0$) et ω (obtenue pour $\mu \to +\infty$). Ce processus produit donc bien une concentration de l'énergie du signal vers la droite $\omega = \omega_0$, la focalisation étant d'autant plus importante que le paramètre μ, choisi librement par l'utilisateur, est petit.

4.2 Impulsion

Pour une impulsion localisée en t_0, $x(t) = \delta(t - t_0)$, on obtient $\Phi_x^h(t,\omega) = -\omega\, t_0$, donc

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) = -t_0, \quad \frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = 0 \quad (13)$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = 0.$$

Avec la réallocation classique, $\hat{t}_x(t,\omega) = t_0$ et $\hat{\omega}_x(t,\omega) = \omega$, donc la totalité de l'énergie du signal est concentrée sur la droite $t = t_0$. Avec la réallocation de Levenberg-Marquardt, $\tilde{t}_x(t,\omega) = \frac{t_0 + \mu t}{1+\mu}$ et $\tilde{\omega}_x(t,\omega) = \omega$. Comme dans le cas précédent, l'utilisateur peut donc choisir l'augmentation de concentration qu'il désire en prenant une valeur de μ comprise entre 0 (conduisant à une concentration totale puisque $\tilde{t}_x(t,\omega) = t_0$) et l'infini (ne produisant aucune amélioration puisque $\tilde{t}_x(t,\omega) = t$).

4.3 Logon gaussien

Pour $x(t) = T^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-t^2/(2T^2)}$, ce qui correspond à un logon gaussien centré sur l'origine et de largeur temporelle T, on obtient [4] $\Phi_x^h(t,\omega) = -\frac{T^2}{\lambda^2+T^2}\,\omega t$, donc

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) = -\frac{T^2\, t}{\lambda^2 + T^2}, \quad \frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = -\frac{T^2\, \omega}{\lambda^2 + T^2} \quad (14)$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = -\frac{T^2}{\lambda^2 + T^2}, \ \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = 0.$$

La réallocation classique produit un rapprochement vers le centre du logon : $\hat{t}_x(t,\omega) = \frac{T^2}{\lambda^2+T^2}\, t$ et $\hat{\omega}_x(t,\omega) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+T^2}\, \omega$, donc $|\hat{t}_x| < |t|$ et $|\hat{\omega}_x| < |\omega|$. Mais les rapprochements temporels et fréquentiels sont antagonistes : si $\lambda \to 0$, $\hat{\omega}_x \to 0$ mais $\hat{t}_x \to t$, tandis que lorsque $\lambda \to +\infty$, $\hat{t}_x \to 0$ mais $\hat{\omega}_x \to \omega$. Avec la réallocation de Levenberg-Marquardt, $\frac{\tilde{t}_x(t,\omega)}{t} = \frac{\tilde{\omega}_x(t,\omega)}{\omega} = \frac{\mu(\lambda^2+T^2)}{\lambda^2+\mu(\lambda^2+T^2)}$. Le point $(\tilde{t}_x, \tilde{\omega}_x)$ appartient donc au segment de droite compris entre le point $(0,0)$ (obtenu pour $\mu = 0$) et le point (t,ω) (obtenu pour $\mu \to +\infty$). L'utilisateur a donc la possibilité, par le choix du facteur d'amortissement μ, soit de réaliser une concentration de l'énergie du signal plus forte qu'avec la réallocation classique, en affectant la totalité de l'énergie du signal au centre du logon, soit au contraire de ne réaliser qu'une faible augmentation de la concentration du signal. On remarquera également que le point $(\hat{t}_x, \hat{\omega}_x)$ ne fait pas partie de l'ensemble de tous les points $(\tilde{t}_x, \tilde{\omega}_x)$ obtenus pour $\mu \in I\!R_+$.

4.4 Modulation linéaire de fréquence

Pour une modulation linéaire de fréquence, $x(t) = e^{\jmath \alpha t^2/2}$, on obtient $\Phi_x^h(t,\omega) = \frac{\alpha t^2}{2} - \omega t - \frac{\alpha\lambda^4(\omega-\alpha t)^2}{2\,(1+\alpha^2\lambda^4)}$, donc

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) = -\frac{t+\alpha\lambda^4\omega}{1+\alpha^2\lambda^4}, \quad \frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = -\frac{\omega-\alpha t}{1+\alpha^2\lambda^4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = -\frac{1}{1+\alpha^2\lambda^4}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2\lambda^4}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = -\frac{\alpha\lambda^4}{1+\alpha^2\lambda^4}.$$

Avec la réallocation classique, $\hat{t}_x(t,\omega) = \frac{t+\alpha\lambda^4\omega}{1+\alpha^2\lambda^4}$ et $\hat{\omega}_x(t,\omega) = \alpha\, \hat{t}_x(t,\omega)$, donc la totalité de l'énergie du signal est concentrée sur la droite $\omega = \alpha\, t$. Avec la réallocation de Levenberg-Marquardt, $\tilde{t}_x(t,\omega) = t + \frac{\alpha\lambda^4}{(1+\mu)(1+\alpha^2\lambda^4)}(\omega-\alpha t)$ et $\tilde{\omega}_x(t,\omega) = \omega - \frac{1}{(1+\mu)(1+\alpha^2\lambda^4)}(\omega-\alpha t)$. Ces opérateurs de réallocation vérifient donc la relation $\tilde{\omega}_x(t,\omega) - \alpha\tilde{t}_x(t,\omega) = \frac{\mu}{1+\mu}(\omega-\alpha t)$, ce qui montre que le point $(\tilde{t}_x, \tilde{\omega}_x)$ est sur la droite de la fréquence instantanée dans la limite $\mu \to 0$ et reste au point (t,ω) lorsque $\mu \to +\infty$. On notera qu'ici encore le point $(\hat{t}_x, \hat{\omega}_x)$ ne fait pas partie de l'ensemble de tous les points $(\tilde{t}_x, \tilde{\omega}_x)$ obtenus pour $\mu \in I\!R_+$.

On pourra vérifier que les expressions de $\tilde{t}_x$ et $\tilde{\omega}_x$ présentées aux paragraphes 4.1, 4.2 et 4.4 correspondent à des formes indéterminées si $\mu = 0$, puisque dans ces trois cas $\nabla R_x^h + \mu\, I_2$ n'est pas inversible.

5 Mise en œuvre pour des signaux quelconques

Le calcul de ces nouveaux opérateurs de réallocation n'est pas seulement possible pour des signaux analytiques simples. Bien au contraire, il peut être obtenu pour n'importe quel signal, grâce à la possibilité de calculer les dérivées de la phase $\Phi_x^h(t,\omega)$ à l'aide de transformées de Fourier à court-terme utilisant des fenêtres d'analyse particulières :

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial \omega}(t,\omega) = -t + \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{Th}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{Dh}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{D^2h}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)} - \left(\frac{\mathrm{F}_x^{Dh}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right)^2\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{TDh}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)} - \frac{\mathrm{F}_x^{Th}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\frac{\mathrm{F}_x^{Dh}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{T^2h}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)} - \left(\frac{\mathrm{F}_x^{Th}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right)^2\right) \tag{18}$$

où $Th(t) = t\, h(t), T^2h(t) = t^2\, h(t), Dh(t) = \frac{dh}{dt}(t), D^2h(t) = \frac{d^2h}{dt^2}(t)$, $TDh(t) = t\, \frac{dh}{dt}(t)$ et $\mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$ correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire du nombre complexe z. Par rapport à la réallocation classique, la réallocation de Levenberg-Marquardt nécessite donc le calcul de trois transformées de Fourier à court-terme supplémentaires utilisant les fenêtres d'analyse TDh, T^2h et D^2h. Ces expressions et ce coût de calcul se réduisent substantiellement si, comme dans le paragraphe précédent, h est une fenêtre gaussienne d'énergie unitaire. Dans ce cas, $Dh(t) = -Th(t)/\lambda^2$ et $D^2h(t) = -h(t)/\lambda^2 + T^2h(t)/\lambda^4$ et les expressions précédentes deviennent :

$$\frac{\partial \Phi_x^h}{\partial t}(t,\omega) = -\frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{Th}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) = -\frac{1}{\lambda^4}\,\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t,\omega) = -\frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{F}_x^{T^2h}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)} - \left(\frac{\mathrm{F}_x^{Th}(t,\omega)}{\mathrm{F}_x^h(t,\omega)}\right)^2\right)$$

Par rapport à la réallocation classique, la réallocation de Levenberg-Marquardt ne nécessite plus que le calcul supplémentaire de la transformée de Fourier court-terme utilisant la fenêtre d'analyse T^2h. On pourra remarquer que la relation (20) permet de déduire une relation qui peut paraître étonnante entre dérivées secondes de la phase de la transformée de Fourier court-terme d'un signal quelconque :

$$\lambda^2\,\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial t^2}(t,\omega) + \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial^2 \Phi_x^h}{\partial \omega^2}(t,\omega) = 0 \tag{21}$$

L'existence d'une relation entre dérivées partielles est cependant inévitable dans le cas d'une fenêtre gaussienne, puisque les deux dérivées premières et les trois dérivées secondes sont déduites des deux nombres complexes $\mathrm{F}_x^{T^2h}/\mathrm{F}_x^{Th}$ et $\mathrm{F}_x^{Th}/\mathrm{F}_x^h$. L'expression (21) semble nouvelle et vient compléter plusieurs résultats présentés dans [3], obtenus dans le cas où $\lambda = 1$.

6 Un exemple numérique

L'existence de moyens efficaces de calcul des opérateurs de réallocation proposés permet d'appliquer ce processus à un signal quelconque. Pour illustrer cet article, un signal de 256 points constitué de quatre composantes déterministes noyées dans un bruit additif blanc gaussien avec un rapport signal sur bruit de 10 dB a été choisi. La fenêtre d'analyse utilisée est un fenêtre gaussienne avec $\lambda/T_e = 11$. La figure 1 montre le spectrogramme réalloué avec les opérateurs classiques. La figure 2 montre un ensemble de représentations obtenues avec la réallocation de Levenberg-Marquardt, pour des valeurs de μ allant de 10^{-2} à 40. Elle montre bien que cette réallocation permet d'obtenir une représentation temps-fréquence soit plus concentrée que celle obtenue avec la réallocation classique, soit

moins concentrée, se rapprochant alors du spectrogramme non réalloué, présenté figure 3.

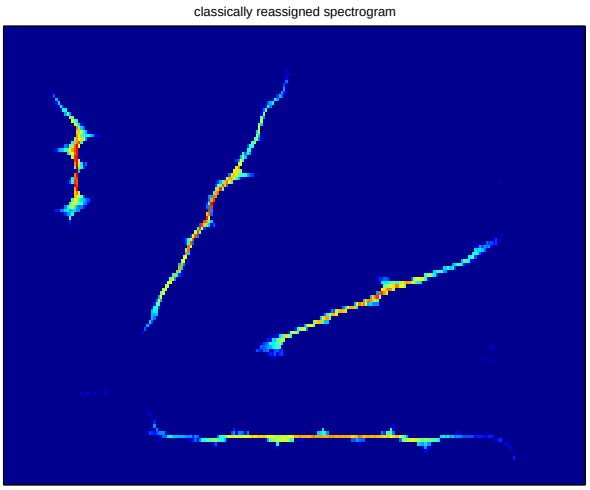

FIGURE 1 – spectrogramme du signal réalloué avec les opérateurs classiques.

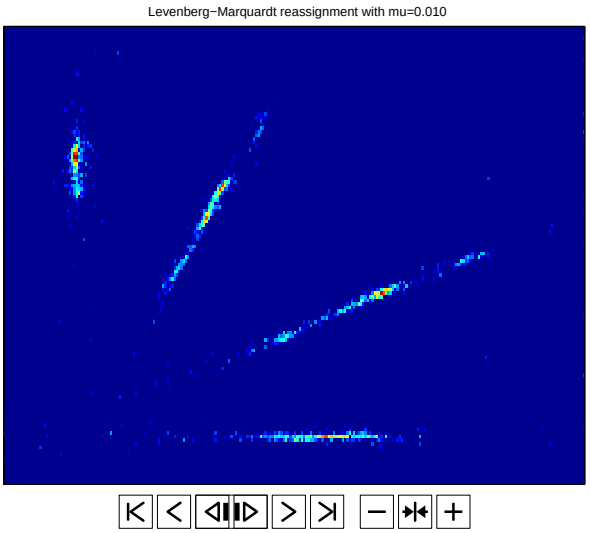

FIGURE 2 – spectrogramme du signal réalloué avec les opérateurs de Levenberg-Marquardt.

7 Conclusion

Dans cet article, un nouveau processus de réallocation a été présenté. Pour un utilisateur, la caractéristique principale de ce processus est de pouvoir être ajusté à son souhait soit de concentrer très fortement les composantes du signal, soit au contraire de n'améliorer que faiblement la concentration du spectrogramme. Parmi les perspectives offertes par cette nouvelle méthode, on peut envisager tout d'abord de l'associer à un algorithme de détection signal/bruit, afin de réallouer fortement les composantes déterministes du signal et moins fortement les composantes aléatoires. Il serait également intéressant de généraliser ce processus aux transformées en ondelettes continues et à toutes les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen. Des éléments permettant de reproduire et d'approfondir les résultats présentés ici sont disponibles sur simple demande envoyée au premier auteur.

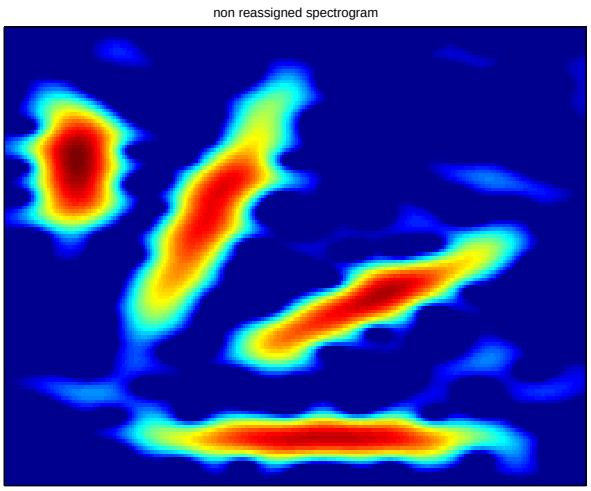

FIGURE 3 – spectrogramme (non réalloué) du signal.

Références

[1] F. Auger, P. Flandrin, "Improving the Readability of Time-Frequency and Time-Scale Representations by the Reassignment Method," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 43, No 5, pp. 1068–1089, Mai 1995.

[2] E. Brevdo, H.-T. Wu, G. Thakur, N.-S. Fuckar, "Synchrosqueezing and its Applications in the Analysis of Signals with Time-varying Spectrum", submitted to the Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2011.

[3] E. Chassande-Mottin, I. Daubechies, F. Auger, P. Flandrin, "Differential reassignment," IEEE Signal Processing Letters, Vol 4, No 10, pp. 293–294, oct 1997.

[4] E. Chassande-Mottin, "Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non-stationnaires", Thèse de l'Université de Cergy-Pontoise, 28 sept. 1998.

[5] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin, "Reassignment", in F. Hlawatsch, F. Auger, "Time-Frequency Analysis - Concepts and Methods", ISTE Limited (Hermes Science Publishing)– John Wiley and Sons, septembre 2008.

[6] N. Delprat, B. Escudie, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, B. Torresani, "Asymptotic wavelet and Gabor analysis : extraction of instantaneous frequencies", IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 38, No 2, pp. 644 - 664, 1992.

[7] P. Flandrin, "Time-frequency/time-scale analysis", Academic Press, San Diego (CA), 1999.

[8] P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, "Practical optimization", Academic Press, 1982.

[9] K. Kodera, C. de Villedary, R. Gendrin, "A new method for the numerical analysis of nonstationary signals", *Phys. Earth and Plan. Int.*, Vol 12, pp. 142–150, 1976.

[10] K. Kodera, "Analyse numérique de signaux géophysiques non-stationnaires : diagnostic du plasma magnétosphérique à partir des émissions UBF naturelles, caractéristiques nécessaires des équipments d'analyse de ces ondes", Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 27 janvier 1976.

[11] K. Kodera, R. Gendrin, C. de Villedary, "Analysis of time-varying signals with small BT values", *IEEE Transactions on ASSP*, Vol. 26, No 1, pp. 64 – 76, Feb 1978.

[12] K. Levenberg, "A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares", Quart. Appl. Math., Vol. 2, pp. 164-168, 1944.

[13] J. Lu, I. Daubechies and H.-T. Wu, "Synchrosqueezed wavelet transforms : an empirical mode decomposition-like tool", Appl. Comp. Harmonic Anal., No 30, pp. 243–261, 2011.

[14] D. Marquardt, "An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters", SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, No 2, pp. 431–441, 1963.

[15] H.T. Wu, P. Flandrin, I. Daubechies : "One or Two Frequencies ? The Synchrosqueezing Answers", Adv. Adapt. Data Anal., à paraître en 2011.