DS Electronique d'Instrumentation II
Numéro 2, mars 2012
F. Auger

Exo 1 Régime sinusoïdal établi $\Rightarrow$ utilisation des grandeurs complexes associées

1) Au point d'interconnection de R_1, R_2 et C_1

$$\frac{\bar{v}_e - \bar{v}_{1+}}{R_1} + \frac{\bar{v}_{s1} - \bar{v}_{1+}}{R_2} = jC_1\omega\,\bar{v}_{1+} + \bar{i}_{1+}$$

Au point d'interconnection de R_3 et R_4

$$\frac{\bar{v}_{s1} - \bar{v}_{1-}}{R_3} = \bar{i}_{1-} + \frac{\bar{v}_{1-}}{R_4}$$

Si l'AO est idéal $v_{1+} - v_{1-} \approx 0\,V$ et $i_{1+} \approx i_{1-} \approx 0\,A$

donc $$\frac{\bar{v}_e}{R_1} + \frac{\bar{v}_{s1}}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega\right)\bar{v}_{1+}$$

$$\frac{\bar{v}_{s1}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\bar{v}_{1-} = \frac{R_3+R_4}{R_3R_4}\,\bar{v}_{1-} \Rightarrow \bar{v}_{1-} = \frac{R_4}{R_3+R_4}\,\bar{v}_{s1} \text{ (pont diviseur)}$$

donc $$\frac{\bar{v}_e}{R_1} + \frac{\bar{v}_{s1}}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega\right)\frac{R_4}{R_3+R_4}\,v_{s1}$$

en multipliant tout par $R_1R_2(R_3+R_4)$

$$R_2(R_3+R_4)\,\bar{v}_e + R_1(R_3+R_4)\,\bar{v}_{s1} = R_4\left(R_2 + R_1 + jR_1R_2C_1\omega\right)\bar{v}_{s1}$$

$$R_2(R_3+R_4)\,\bar{v}_e = \left((R_1+R_2)R_4 - R_1(R_3+R_4) + jR_1R_2R_4C_1\omega\right)\bar{v}_{s1}$$

$$v_{s1} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{(R_2R_4 - R_1R_3) + jR_1R_2R_4C_1\omega}\,\bar{v}_e$$

Cette fonction de transfert sera imaginaire pure si $R_2R_4 = R_1R_3$

on a alors $R_2(R_3+R_4) = R_2R_3 + R_2R_4 = R_2R_3 + R_1R_3 = (R_1+R_2)R_3$

$$v_{s1} = \frac{R_2(R_3+R_4)}{jR_1R_2R_4C_1\omega}\,v_e = \frac{R_3+R_4}{jR_1C_1R_4\omega}\,v_e = \frac{R_3+R_4}{R_4} \times \frac{1}{jR_1C_1\omega}\,v_e$$

intégrateur non inverseur

Quand $R_2R_4 - R_1R_3 \neq 0$, c'est un premier ordre qui peut être instable

2) $\dfrac{\overline{V_{s1}} - \overline{V_{1-}}}{R_5} + \dfrac{\overline{V_{s2}} - \overline{V_{2-}}}{1/jC_2\omega} = \overline{i_{2-}} \Rightarrow \dfrac{\overline{V_{s1}} - \overline{V_{1-}}}{R_5} + jC_2\omega\left(\overline{V_{s2}} - \overline{V_{2-}}\right) = \overline{i_{2-}}$

$\overline{V_{2+}} = 0\,V$

Si l'AO est idéal

$V_{2+} - V_{2-} \approx 0\,V$ et $i_{2+} \approx i_{2-} \approx 0\,A$

donc $\dfrac{\overline{V_{s1}}}{R_5} + jC_2\omega\,\overline{V_{s2}} = 0\,A \Rightarrow \overline{V_{s2}} = -\dfrac{1}{jR_5C_2\omega}\overline{V_{s1}}$

intégrateur inverseur

3) Donc $\overline{V_{s2}} = -\dfrac{1}{jR_5C_2\omega}\overline{V_{s1}} = -\dfrac{1}{jR_5C_2\omega}\dfrac{R_2(R_3+R_4)}{(R_2R_4 - R_1R_3) + jR_1R_2R_4C_1\omega}\overline{V_e}$

soit $\overline{V_{s2}} = \dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_1C_1R_2C_2\omega^2R_4R_5 - j(R_2R_4 - R_1R_3)R_5C_2\omega}\overline{V_e}$

Or $V_e = V_{s2}$, donc il faut que $\dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_4R_5 - R_1C_1R_2C_2\omega^2 - j(R_2R_4 - R_1R_3)R_5C_2\omega} = 1$

ce qui implique $R_2R_4 - R_1R_3 = 0 \Rightarrow \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_3}{R_4}$ intégrateur pur pour le 1er circuit

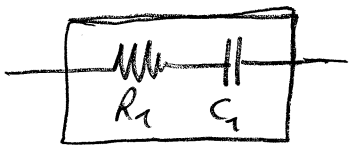
$\dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_4R_5 - R_1C_1R_2C_2\omega^2} = 1$ soit $\omega^2 = \dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_4R_5 - R_1C_1R_2C_2}$

d) Donc $\omega_{osc} = \sqrt{\dfrac{R_2(R_3+R_4)}{R_4R_5 - R_1C_1R_2C_2}}$

R_1, R_2, R_3 et R_4 sont contraints par la condition d'oscillation $\Rightarrow$ ils ne peuvent pas varier librement

Donc R_4, R_5, C_1 et C_2 peuvent être des capteurs passifs : il feront varier ω_{osc} sans faire disparaître l'oscillation à la sortie du circuit.

exo 2

a) 

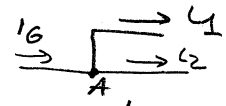
Z correspond à R_1 en série avec C_1

$$\Rightarrow Z = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1+jR_1C_1\omega}{jC_1\omega}$$

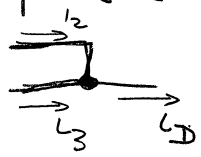
b) Si on suppose l'AO idéal $\bar{v}_B = \bar{v}_- = \bar{v}_+ = 0\,V$

et $i_- \approx 0\,A \Rightarrow$ la résistance $(1-\alpha)R$ est traversée par le courant i_2

c) Si on appelle i_G le courant qui traverse la résistance R_f de gauche, au noeud A, la loi des noeuds s'écrit $\boxed{i_G = i_1 + i_2}$ (de gauche à droite)



Si on appelle i_D le courant qui traverse la résistance R_f de droite (de la gauche vers la droite), la loi des noeuds au point C s'écrit $\boxed{i_2 + i_3 = i_D}$



d) $v_e - v_s = R_f(i_1+i_2) + Z i_1 = Z i_3 + R_f(i_2+i_3)$

donc $R_f(i_1+i_2-i_2-i_3) + Z(i_1-i_3) = (R_f+Z)(i_1-i_3) = 0$

$\Rightarrow i_1 - i_3 = 0\ A \Rightarrow i_1 = i_3$

e) $v_e - v_s = R_f(i_1+i_2) + R i_2 + R_f(i_2+i_3) = 2R_f(i_1+i_2) + R i_2 = 2R_f i_1 + (2R_f+R) i_2$

et $v_e - v_s = (R_f+Z) i_1 + R_f i_2$

donc $(2R_f - R_f - Z) i_1 + (2R_f + R - R_f) i_2 = 0\ V$

$(R_f - Z) i_1 + (R_f + R) i_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{Z-R_f}{R+R_f} i_1}$$

f) $V_B = 0\,V$ donc $V_e = V_e - V_B = R_f(i_1+i_2) + \alpha R i_2$

$= R_f i_1 + (R_f + \alpha R)\frac{Z-R_f}{R+R_f} i_1$

$$V_e = \left[R_f + (R_f+\alpha R)\frac{Z-R_f}{R+R_f}\right] i_1$$

et $-V_s = V_B - V_s = (1-\alpha)R i_2 + R_f(i_2+i_3) = (1-\alpha)R i_2 + R_f(i_1+i_2)$

$= R_f i_1 + ((1-\alpha)R + R_f)\frac{Z-R_f}{R+R_f} i_1$

$$V_s = -\left[R_f + (R_f + (1-\alpha)R)\frac{Z-R_f}{R+R_f}\right] i_1$$

donc $\dfrac{V_s}{V_e} = -\dfrac{R_f(R+R_f) + [R_f + (1-\alpha)R](Z-R_f)}{R_f(R+R_f) + [R_f + \alpha R](Z-R_f)}$

$$= -\frac{RR_f + \cancel{R_f^2} + [R_f + (1-\alpha)R]Z - \cancel{R_f^2} - (1-\alpha)RR_f}{RR_f + \cancel{R_f^2} + [R_f + \alpha R]Z - \cancel{R_f^2} - \alpha RR_f}$$

$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = -\frac{\alpha RR_f + [R_f + (1-\alpha)R]Z}{(1-\alpha)RR_f + [R_f + \alpha R]Z}}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ alors $1-\alpha = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = 1-\alpha$ donc $\frac{V_s}{V_e} = -1$

g) Si $\omega \to 0$ $Z \to +\infty$ donc $\dfrac{V_s}{V_e} \approx -\dfrac{R_f + (1-\alpha)R}{R_f + \alpha R} = H(0)$

Si $\alpha = 0$ $H_0(0) = -\dfrac{R_f + R}{R_f}$ Si $\alpha = 1$ $H_1(0) = -\dfrac{R_f}{R_f + R} = \dfrac{1}{H_0(0)}$

C'est ce que l'on voit sur la figure 3 : Pour $\alpha = 0$ on a $|H_0(0)|_{dB} = 12$ pour $\alpha = 1$ on a $|H_1(0)| = -12$ dB. La phase est toujours de $-180°$

h) Si $\omega \to +\infty$ $Z \to R_1$ donc $\dfrac{V_s}{V_e} = -\dfrac{\alpha RR_f + [R_f + (1-\alpha)R]R_1}{(1-\alpha)RR_f + (R_f + \alpha R)R_1} = H(\infty)$

Si $\alpha = 0$ $H_0(\infty) = -\dfrac{(R_f + R)R_1}{RR_f + (R_f)R_1} = -\dfrac{(R_f + R)R_1}{(R_1 + R)R_f}$

Si $\alpha = 1$ $H_1(\infty) = -\dfrac{RR_f + R_f R_1}{(R_f + R)R_1} = -\dfrac{(R_f + R)R_f}{(R_f + R)R_1}$

$$\boxed{H_1(\infty) = \frac{1}{H_0(\infty)}}$$

On retrouve ces résultats sur la figure 3 :

quand $\alpha = 0$ $|H_0(\infty)|_{dB} = -12$ dB quand $\alpha = 1$ $|H_1(\infty)| = +12$ dB

Dans les deux cas, la phase est égale à $-180°$

i) $H_0(0) = H_1(\infty) \Rightarrow -\dfrac{R_f + R}{R_f} = -\dfrac{(R_1 + R)R_f}{(R_f + R)R_1}$

$\Rightarrow (R_f + R)^2 R_1 = (R_1 + R)R_f^2$

$\Rightarrow \cancel{R_f^2 R_1} + 2R_f R R_1 + R^2 R_1 = \cancel{R_f^2 R_1} + R_f^2 R$

$2R_f R_1 + RR_1 = R_f^2 \Rightarrow R_1(R + 2R_f) = R_f^2$

$$\boxed{R_1 = \frac{R_f^2}{2R_f + R}}$$

d)

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{\alpha R R_g j C_1\omega + [R_g + (1-\alpha)R](1+jR_1C_1\omega)}{(1-\alpha)RR_g jC\omega + [R_g+\alpha R](1+jR_1C_1\omega)}$$

$$H(\omega) = -\frac{R_g + (1-\alpha)R + jC_1\omega\left[R_1(R_g+(1-\alpha)R) + \alpha R R_g\right]}{R_g + \alpha R + jC_1\omega\left[R_1(R_g+\alpha R) + (1-\alpha)RR_g\right]}$$

$$|H(\omega)|^2 = 1 \iff (R_g+(1-\alpha)R)^2 + C_1^2\omega^2\left[R_1(R_g+(1-\alpha)R) + \alpha R R_g\right]^2 =$$
$$(R_g+\alpha R)^2 + C_1^2\omega^2\left[R_1(R_g+\alpha R) + (1-\alpha)RR_g\right]^2$$

$$\iff (R_g+(1-\alpha)R)^2 - (R_g+\alpha R)^2 = C_1^2\omega^2\left(\begin{array}{l}\left[R_1(R_g+\alpha R)+(1-\alpha)RR_g\right]^2 \\ -\left[R_1(R_g+(1-\alpha)R)+\alpha R R_g\right]^2\end{array}\right)$$

$$\iff (2R_g+R)(1-2\alpha)R = C_1^2\omega^2\left(R_1(2R_g+R)+RR_g\right)\left(R_1(2\alpha-1)R+(1-2\alpha)RR_g\right)$$

$$\iff (2R_g+R)\cancel{R} = C_1^2\omega^2\left(R_1(R_g+R)+RR_g\right)\cancel{\alpha}(R_g-R_1)$$

α a disparu ! Bien sûr, ceci n'a de sens que si $\alpha \neq 1/2$.

$$\omega^2 = \frac{2R_g+R}{C_1^2(R_g-R_1)\left[R_1(2R_g+R)+RR_g\right]}$$

Cette équation admet une solution si $R_g - R_1 > 0$
c'est à dire $R_g > R_1$

on a alors $\omega_p = 2\pi f_p = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2R_g+R}{(R_g-R_1)\left[R_1(2R_g+R)+RR_g\right]}}$

Cette pulsation "pivot" est indépendante de α, donc de la position du potentiomètre

Université de Nantes - IUT de Saint Nazaire

Département Mesures Physiques

Devoir surveillé d'Électronique d'Instrumentation II

DUT MP, Semestre 4, 2011/2012. Durée : **1 heure 30**.

Les deux exercices sont indépendants. Si vous joignez cet énoncé à votre copie, indiquez ci-dessous votre nom, prénom et groupe.	
nom, prénom	groupe

1. **(8 points)** Le circuit de la figure 1 est un oscillateur. Il est constitué de deux parties : la première[1], centrée autour de l'amplificateur opérationnel 1, élabore v_{s1} à partir de v_e. La seconde, centrée autour de l'amplificateur opérationnel 2, élabore v_{s2} à partir de v_{s1}. On notera

   - v_{1-} et v_{1+} les tensions aux bornes des entrées inverseuses et non-inverseuses de l'amplificateur opérationnel 1, i_{1-} et i_{1+} les courants allant vers ces deux entrées ;
   - v_{2-} et v_{2+} les tensions aux bornes des entrées inverseuses et non-inverseuses de l'amplificateur opérationnel 2, i_{2-} et i_{2+} les courants allant vers ces deux entrées ;

   On étudiera ce montage en régime sinusoïdal établi et on notera ω la pulsation de la tension d'entrée v_e.

   (a) Quelle est la relation entre v_e, v_{s1}, v_{1+} et i_{1+} ? Quelle est la relation entre v_{s1}, v_{1-} et i_{1-} ? Que deviennent ces équations si l'amplificateur opérationnel 1 est supposé idéal ? En déduire la relation entre v_{s1} et v_e. À quelle condition la fonction de transfert v_{s1}/v_e est-elle imaginaire pure ? Quelle est la fonction réalisée par cette partie du circuit ?

   (b) Quelle est la relation entre v_{s1}, v_{s2}, v_{2-} et i_{2-} ? À quoi est égale la tension v_{2+} ? Que deviennent ces équations si l'amplificateur opérationnel 2 est supposé idéal ? En déduire la relation entre v_{s2} et v_{s1}. Quelle est la fonction réalisée par cette partie du circuit ?

   (c) Déduire des deux questions précédentes une relation entre v_{s2} et v_e. Si, comme sur le schéma de la figure 1, les points E et S_2 sont reliés par un fil conducteur, à quelle condition v_{s2} peut-elle être une tension sinusoïdale d'amplitude non nulle ?

   (d) Quelle est la valeur de la pulsation ω_{osc} à laquelle ce circuit oscille et quels sont les dipôles de ce circuit qui peuvent être remplacés par des capteurs passifs afin de transmettre un résultat de mesure sous la forme d'une sinusoïde d'amplitude constante dont la fréquence varie en fonction de la grandeur mesurée ?

2. **(12 points)** Le circuit[2] de la figure 2 est un filtre d'inclination (*tilt equalizer filter*). Il comporte un potentiomètre, représenté sur ce schéma par les deux résistances en série de valeurs αR et $(1-\alpha)R$ (R est la résistance totale du potentiomètre et α, compris entre 0 et 1, correspond à la position du potentiomètre). Suivant la position de ce potentiomètre, ce circuit va soit amplifier les basses fréquences et atténuer les hautes fréquences, soit au contraire réhausser les hautes fréquences aux détriment des basses fréquences (voir figure 3). La frontière entre les basses et hautes fréquences se fait à une fréquence pivot f_p, où la fonction de transfert v_s/v_e a toujours un module égale à 1, quelle que soit la valeur de α. On étudiera ce montage en régime sinusoïdal établi et on notera ω la pulsation de la tension d'entrée v_e. On notera v_- et v_+ les tensions aux bornes des entrées inverseuses et non-inverseuses de l'amplificateur opérationnel, i_- et i_+ les courants allant vers ces deux entrées, i_1, i_2, i_3 les courants qui circulent respectivement dans l'impédance Z de droite, dans la résistance αR et dans l'impédance Z de gauche (voir figure 2).

   (a) Z correspond à l'impédance d'une résistance R_1 en série avec une capacité C_1. Quelle est l'expression de Z ?

[1] Voir Paul Bildstein, "Synthèse et réalisation des filtres actifs", Techniques de l'ingénieur, chapitre E3-130.

[2] Voir F. Balena, "Implement an audio-frequency tilt equalizer filter", Electronic Design News, 2 février 2012, pp. 42–44.

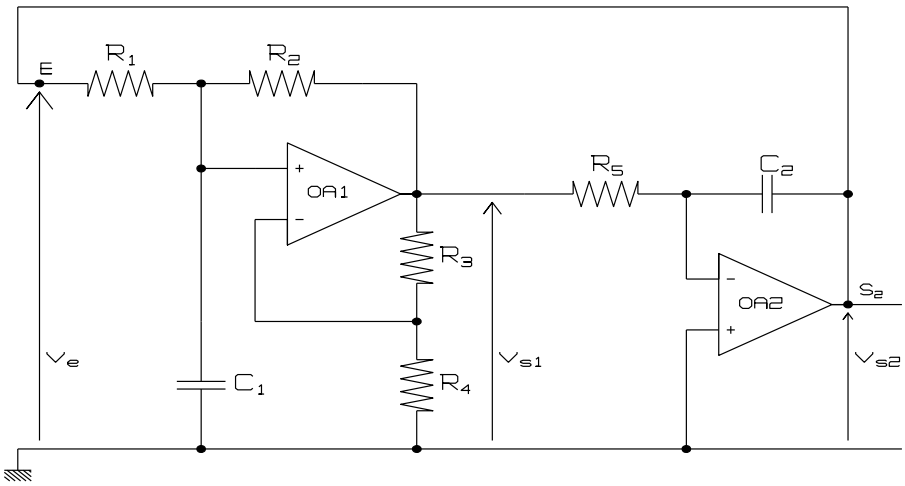


Figure 1: Circuit étudié dans l'exercice 1.

(b) Dans toute la suite de cette étude, on supposera l'amplificateur opérationnel idéal. Quelle est la valeur de v_- ? Quel est le courant qui circule dans la résistance $(1-\alpha)R$?

(c) En considérant les nœuds A et C, déterminer les courants qui circulent dans la résistance R_f de gauche ainsi que dans celle de droite.

(d) Exprimer $v_e - v_s$ de deux manières différentes : l'une en fonction de i_1, i_2, R_f et Z et l'autre en fonction de i_2, i_3, R_f et Z. En déduire que $i_1 = i_3$.

(e) Exprimer également $v_e - v_s$ en fonction de i_1, i_2, R_f et R. En déduire une relation entre i_2 et i_1.

(f) Exprimer v_e en fonction de i_1, i_2, R_f et αR, puis v_s en fonction de i_2, $i_3 = i_1$, R_f et $(1-\alpha)R$. en déduire que

$$H(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{\alpha R R_f + (R_f + (1-\alpha)R)\, Z}{(1-\alpha)R R_f + (R_f + \alpha R)\, Z}$$

Que vaut $H(\omega)$ si $\alpha = 1/2$?

(g) Si ω tend vers zéro, quel est le terme prépondérant de Z et quelle est la valeur approximative de $H(\omega)$? On notera $H_0(0)$ et $H_1(0)$ les valeurs de $H(0)$ quand $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Quelle est la relation entre $H_0(0)$ et $H_1(0)$? Faire le lien avec la figure 3.

(h) Si ω tend vers $+\infty$, quel est le terme prépondérant de Z et quelle est la valeur approximative de $H(\omega)$? On notera $H_0(\infty)$ et $H_1(\infty)$ les valeurs de $\lim_{\omega\to+\infty} H(\omega)$ quand $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Quelle est la relation entre $H_0(\infty)$ et $H_1(\infty)$? Faire le lien avec la figure 3.

(i) Quelle doit être la valeur de R_1 pour que $H_0(0) = H_1(\infty)$?

(j) En multipliant le numérateur et le dénominateur de $H(\omega)$ par $\jmath C_1\omega$, mettre $H(\omega)$ sous la forme

$$H(\omega) = -\frac{n_r + \jmath n_i}{d_r + \jmath d_i}$$

En déduire que quelle que soit la valeur de α, $|H(\omega)|$ est égal à 1 si ω est solution de l'équation

$$[R R_f + (2R_f + R)R_1]\,(R_f - R_1)C^2\omega^2 = 2R_f + R$$

À quelle condition cette équation admet-elle une solution ? On notera $\omega_p = 2\pi f_p$ cette solution.

Bonne continuation à tous !

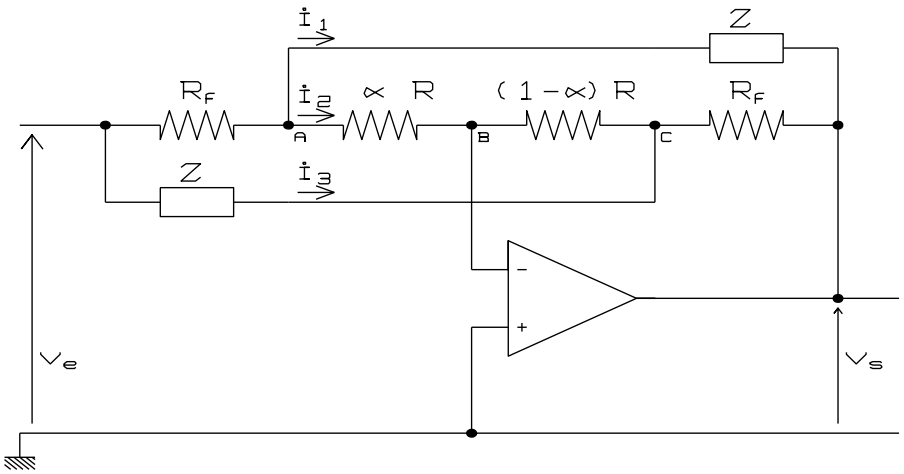


Figure 2: Circuit étudié dans l'exercice 2.

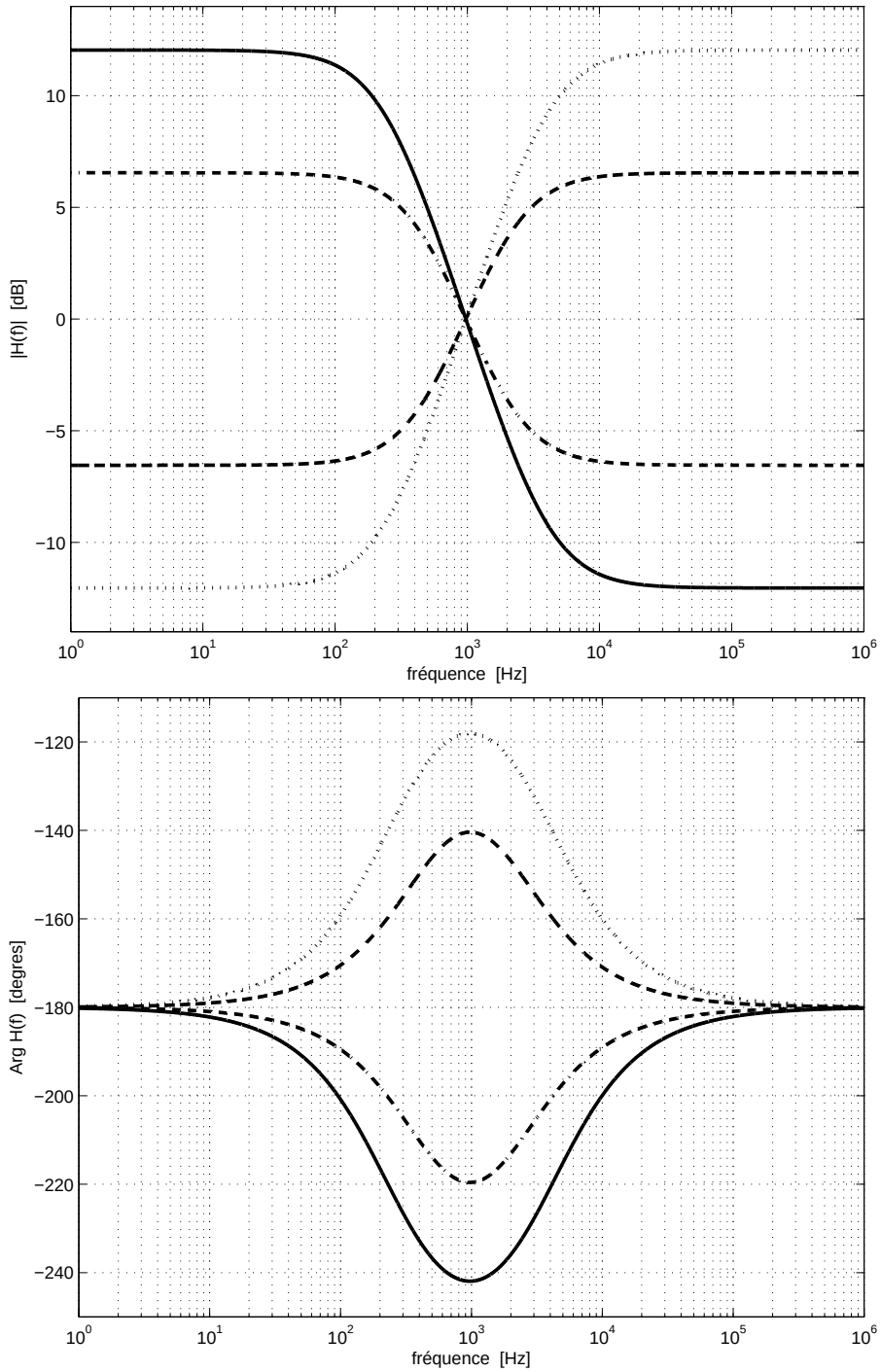


Figure 3: Représentations de Bode de la fonction de transfert du circuit étudié dans l'exercice 2, obtenues pour $\alpha = 0$ (trait continu), $\alpha = 0.2$ (traits mixtes), $\alpha = 0.8$ (traits pointillés longs) et $\alpha = 1$ (traits pointillés courts).